

MATHÉMATIQUES · OPTIMISATION

Problèmes d'optimisation sous contrainte de budget

Deux résolutions détaillées, pas à pas — l'accent sur la méthode

Une même recette pour les deux exercices :

1. écrire la contrainte (le budget) · 2. écrire la grandeur à maximiser · 3. tout ramener à une seule inconnue · 4. chercher le sommet de la parabole.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE · VOLUME

3

L'abri pour la girafe

Un zoo accole à un bâtiment existant un **abri ouvert rectangulaire** : deux parois verticales de **4 m de largeur** et un toit plat. Le toit coûte **40 €/m²**, les deux parois **15 €/m²**. Avec un budget de **1200 €**, quelles dimensions donnent le **plus grand volume** ?

FORME Comprendre la construction

L'abri est collé au mur existant (qu'on ne paie pas). Il reste **3 surfaces** : deux parois de côté (4 m de large, hauteur inconnue ***h***) et un toit plat. Les parois sont écartées d'une longueur ***L***. Le « pavé » obtenu mesure donc **4 m** (largeur) × ***L*** (longueur) × ***h*** (hauteur). Les inconnues à trouver sont ***h*** et ***L***.

ÉTAPE 1 Écrire le coût (budget 1200 €)

Une paroi : $4 \times h = 4h$ m² ; deux parois : $8h$ m² à 15 € → **120h** €.

Le toit : $4 \times L = 4L$ m² à 40 € → **160L** €.

Le total vaut 1200 €. On divise par 40 pour alléger :

$$120h + 160L = 1200 \implies 3h + 4L = 30$$

CONTRAINTE

$3h + 4L = 30$ — le budget attache h et L l'un à l'autre.

ÉTAPE 2 Écrire le volume à maximiser

$$V = L \times 4 \times h = 4Lh$$

ÉTAPE 3 Tout ramener à une seule inconnue

De la contrainte : $4L = 30 - 3h$. Or $V = (4L) \times h$ contient justement ce bloc :

$$V = (30 - 3h)h = 30h - 3h^2$$

Idee clé. Remplacer $4L$ fait disparaître L : le volume ne dépend plus que de h . C'est ce qui rend le problème résoluble.

ÉTAPE 4 Trouver le maximum

$V(h) = 30h - 3h^2$ est une parabole tournée vers le bas : son sommet est un maximum.

$$V'(h) = 30 - 6h = 0 \implies h = 5$$

Sans dérivée : sommet en $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2(-3)} = 5$. Même résultat.

ÉTAPE 5 Revenir chercher L

$$4L = 30 - 3(5) = 15 \implies L = \frac{15}{4} = 3,75$$

ÉTAPE 6 Vérifier

CONTRÔLE

Coût : $120(5) + 160(3,75) = 600 + 600 = 1200 \text{ €} \checkmark$ · Volume :
 $V = 4 \times 3,75 \times 5 = 75 \text{ m}^3$.

RÉPONSE — ABRI DE VOLUME MAXIMAL

Largeur (donnée)	4 m
Hauteur des parois h	5 m
Longueur L	3,75 m
Volume maximal	75 m ³

À l'optimum : 600 € sur le toit et 600 € sur les parois — les deux dépenses s'équilibrent.

GÉOMÉTRIE PLANE · AIRE

4

Le cabinet médical

Un médecin aménage un cabinet (un **bureau** + une **salle d'attente**).
 Pour les murs et la cloison de séparation, il choisit des cloisons à **45 € le mètre** (mesures prises **au sol**). Avec **2250 €**, quelles dimensions au sol donnent le **plus d'espace** ?

LECTURE Comprendre la figure

Vue de dessus : le sol est un **rectangle** coupé en deux par une cloison. On nomme x la profondeur (côté repéré sur le schéma) et L la longueur.
 Attention : on paie le **mètre de longueur** de cloison, pas le m² — la hauteur des murs ne joue aucun rôle.

ÉTAPE 1 Longueur totale de cloison

Le contour : deux grands côtés $2L$, deux petits côtés $2x$. Plus la cloison du milieu, qui mesure x . Au total :

$$2L + 2x + x = 2L + 3x$$

Le point délicat. Le petit côté apparaît **trois fois** : les deux extrémités et la cloison centrale \rightarrow d'où le $3x$.

ÉTAPE 2 Écrire le budget (2250 €)

Chaque mètre coûte 45 €. On divise par 45, et comme $2250 \div 45 = 50$:

$$45(2L + 3x) = 2250 \implies 2L + 3x = 50$$

CONTRAINTE

$2L + 3x = 50$ — le budget attache L et x .

ÉTAPE 3 Écrire l'aire à maximiser

$$A = L \times x$$

ÉTAPE 4 Ramener à une seule inconnue

De la contrainte : $2L = 50 - 3x$, donc $L = \frac{50 - 3x}{2}$. On remplace :

$$A = \frac{50 - 3x}{2} \times x = \frac{50x - 3x^2}{2}$$

ÉTAPE 5 Trouver le maximum

$$A'(x) = \frac{50 - 6x}{2} = 0 \implies x = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \approx 8,33$$

Sans dérivée : sommet en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2(-3)} = \frac{25}{3}$.

ÉTAPE 6 Revenir chercher L

$$2L = 50 - 3 \times \frac{25}{3} = 25 \implies L = \frac{25}{2} = 12,5$$

ÉTAPE 7 Vérifier

CONTRÔLE

Cloison : $2(12,5) + 3(8,33) = 50 \text{ m} \rightarrow 50 \times 45 = 2250 \text{ €} \checkmark$ · Aire :

$$A = 12,5 \times \frac{25}{3} = \frac{625}{6} \approx 104,17 \text{ m}^2.$$

RÉPONSE — CABINET DE SURFACE MAXIMALE

Profondeur x	$25/3 \approx 8,33 \text{ m}$
----------------	-------------------------------

Longueur L	$12,5 \text{ m}$
--------------	------------------

Surface maximale	$\approx 104,17 \text{ m}^2$
------------------	------------------------------

À l'optimum : $2L = 25$ et $3x = 25$ — la contrainte se partage en deux parts égales.

La méthode est toujours la même : **contrainte** \rightarrow **grandeur à maximiser** \rightarrow **une seule inconnue** \rightarrow **sommet de la parabole**.

Astuce de vérification : à l'optimum, la contrainte se sépare toujours en deux parts égales.