ALGÈBRE · SECOND DEGRÉ

Domaine, conditions d'existence & étude de signe

Exercices résolus — équations rationnelles et trinômes

🔑 Le réflexe « déduire l'autre solution »

Quand on connaît une racine x_1 d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, on trouve l'autre grâce au **produit des racines** :

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(ou la somme } \ x_1 + x_2 = -\tfrac{b}{a}\text{)}$$

Pas besoin de discriminant : une simple division suffit.

ÉQUATION RATIONNELLE · CONDITIONS D'EXISTENCE

1 Résoudre une équation avec dénominateurs

Résoudre $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-3}{x-1} = 2 - \dfrac{2}{x-1}$.

ÉTAPE 1 Conditions d'existence (CE)

Les dénominateurs doivent être non nuls : $x - 2 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$.

DOMAINE

$x \neq 1$ et $x \neq 2$, c'est-à-dire $D = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}$.

ÉTAPE 2 Même dénominateur, puis égalité des numérateurs

Dénominateur commun : $(x-2)(x-1)$. En égalant les numérateurs :

$$(x-1)^2 + (x-3)(x-2) = 2(x-2)(x-1) - 2(x-2)$$

ÉTAPE 3 Développer chaque côté

À gauche :
$(x-1)^2 + (x-3)(x-2) = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 5x + 6) = 2x^2 - 7x + 7.$

À droite : $2(x^2 - 3x + 2) - (2x - 4) = 2x^2 - 8x + 8.$

$$2x^2 - 7x + 7 = 2x^2 - 8x + 8$$

Les $2x^2$ se simplifient : $-7x + 7 = -8x + 8 \;\Rightarrow\; x = 1.$

ÉTAPE 4 Confronter aux conditions d'existence

La seule valeur trouvée est $x = 1$… mais $x = 1$ est **exclu** du domaine !

CONCLUSION

Aucune valeur admissible ne convient : $\boxed{S = \varnothing}$ (l'équation n'a pas de solution).

Leçon. *Toujours vérifier la solution trouvée contre les CE : ici elle « tombe » pile sur une valeur interdite.*

2

VÉRIFIER UNE RACINE · EN DÉDUIRE L'AUTRE

L'équation $x^2 + 2x = 3$

a) Le nombre -3 est-il solution ? b) Si oui, en déduire l'autre solution.

A) Tester $x = -3$

On met l'équation sous la forme $x^2 + 2x - 3 = 0$, puis on remplace :

$$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0 \checkmark$$

Le résultat est 0 : **oui, -3 est bien une solution.**

B) En déduire l'autre racine

Ici $a = 1$, $c = -3$, donc le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = -3$:

$$x_1 \times x_2 = -3 \ \Rightarrow\ (-3) \times x_2 = -3 \ \Rightarrow\ x_2 = 1$$

VÉRIFICATION

$1^2 + 2(1) - 3 = 0 \checkmark$

RÉPONSE

Les deux solutions sont -3 et 1.

3

MISE EN ÉQUATION · SOMME ET PRODUIT

Deux nombres : différence et produit

Déterminer deux nombres dont la **différence** *vaut* 15 *et le* **produit** *vaut* -36.

ÉTAPE 1 Poser l'équation

Appelons le plus grand x ; l'autre vaut alors $x - 15$. Leur produit est -36 :

$$x\,(x-15) = -36 \;\Rightarrow\; x^2 - 15x + 36 = 0$$

ÉTAPE 2 Résoudre le trinôme

$$\Delta = (-15)^2 - 4(1)(36) = 225 - 144 = 81 \quad (\sqrt{\Delta} = 9)$$

$$x = \frac{15 \pm 9}{2} \;\Rightarrow\; x = 12 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

ÉTAPE 3 Reconstituer les couples

Si $x = 12$, l'autre nombre est $12 - 15 = -3$. Si $x = 3$, l'autre est $3 - 15 = -12$.

VÉRIFICATION

$12 - (-3) = 15$ et $12 \times (-3) = -36$ ✓ · $3 - (-12) = 15$ et $3 \times (-12) = -36$ ✓

RÉPONSE

Deux possibilités : $\{12\,;-3\}$ ou $\{3\,;-12\}$.

4

VÉRIFIER UNE RACINE · EN DÉDUIRE L'AUTRE

L'équation $2x^2 + 7x - 4 = 0$

a) Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il solution ? b) Si oui, en déduire l'autre solution.

A) Tester $x = \frac{1}{2}$

$$2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\tfrac{1}{2}\right) - 4 = 2 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{2} - 4 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2} - 4 = 4 - 4 = 0 \checkmark$$

Oui, $\frac{1}{2}$ est une solution.

B) En déduire l'autre racine

Ici $a = 2$, $c = -4$, donc le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2$:

$$x_1 \times x_2 = -2 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2} \times x_2 = -2 \;\Rightarrow\; x_2 = -4$$

VÉRIFICATION

$2(-4)^2 + 7(-4) - 4 = 32 - 28 - 4 = 0 \checkmark$

RÉPONSE

Les deux solutions sont $\frac{1}{2}$ et -4.

Réflexes du chapitre : **poser les CE** avant de résoudre · **confronter** les solutions au domaine · **produit des racines** $\frac{c}{a}$ pour déduire une seconde solution.